不変集合を用いた制御について

藤田研究室　　　　五十嵐　裕司

平成 17 年 10 月 17 日

1　はじめに

近年、拘束を持つ制御系についての研究が盛んにされている。その中である特徴を持った集合を用いた制御が提唱されてきた。その集合とは

- invariant set(不変集合)
- reachability(可到達性)

などである。本レポートではこのうち invariant set について述べる。

2　本レポートに使われる記号と用語の説明

まずは本レポートに使われる記号と用語の説明を行う。

- 2 つの集合 $\mathcal{U} \subset R^n$ と $\mathcal{V} \subset R^n$ が与えらた時,Minkowski　sum が以下の用にして定義される。

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \triangleq \{u + v | u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$$

  また以下のように Pontryagin(geometric) set difference が定義される。

$$\mathcal{U} \ominus \mathcal{V} \triangleq \{x | x \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\}$$

- $|z|_Q^2$ は二次形式 $z^T Qz$ を表す。
- R:実数全体の集合

また大文字は集合, 小文字は信号を表す。

3　invariant set の定義

ここでは [1] と [2] で述べられている 4 種類の invariant set の定義について述べる。

定義 3.1 *(Positively Invariant Set)*
以下のようなシステムに対し

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

もし　$x(0) \in \Omega$ ならば $x(t) \in \Omega\ \forall t > 0$ である $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ を *positively invariant(PI) set* という。

これは invariant set とは初期状態がある集合内にあると、その状態はどんなに時間がたってもある集合内にとどまり続ける集合である定義されていることになる。しかし、システムを離散系とすると以下のような定義となる。

定義 3.2 *(Positively Invariant set)*
以下のようなシステムに対し

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{2}$$

もし $\forall x_k \in \Omega$ ならば $f(x_k) \in \Omega$ である $\Omega \subset R^n$ を *positively invariant(PI) set* という。

離散系の定義の場合, 連続系とは異なり 1 ステップだけ考えられているが帰納的に考えればこれも連続系の場合と同じく invariant set とはどんなに時間がたってもある集合にとどまり続ける集合として定義されている。これ以後は離散系について考えていくことにする。次に外乱と入力が存在する時の invariant set の定義を行う。

定義 3.3 *(Robust Positively Invariant Set)*
以下のようなシステムに対し

$$x_{k+1} = f(x_k, w) \tag{3}$$

もし $\forall x_k \in \Omega, \forall w \in W$ ならば $f(x_k, w) \in \Omega$ である $\Omega \subset R^n$ を *robust positively invariant(RPI) set* という。

定義 3.4 *((Robust) Control Invariant Set)*
以下のようなシステムに対し

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w) \tag{4}$$

もし $\forall x_k \in \Omega$ に対し $f(x_k, u_k, w) \in \Omega, \forall w \in W$ となる入力 u_k が存在すれば $\Omega \subset R^n$ を *robust control invariant(RCI) set* という。またシステム

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{5}$$

に対し $\forall x_k \in \Omega$ ならば $f(x_k, u_k) \in \Omega$ となる入力が存在すれば $\Omega \subset R^n$ を *control invariant(CI) set* という。

4 invariant set の利用

この章では [2] と [3] で述べられている外乱がある場合の制御について述べる。これからは以下のシステムについて考える。

$$x_{k+1} = f(x_k, u, w) \triangleq Ax_k + Bu + w \tag{6}$$

ここで $x_k \in R^n$ は状態,$u \in R^m$ は入力,$w \in R^n$ は外乱とする。状態と入力に関しては $(x, u) \in X \times U$ の拘束があるとする。ここで $X \subseteq R^n$ $U \subseteq R^m$ である。また X,U はコンパクトな集合であるとする。ただし外乱は持続して入ってくるとし,$w \in W \subset R^n$ の拘束があるとする。ここで W はコンパクトな凸集合とする。また行列 A,B は時不変で (A,B) は可制御とする。

また、このシステムに対して以下のような外乱と拘束がないシステムを考える。

$$z_{k+1} = Az_k + Bv \tag{7}$$

ここで $z \in R^n$ は状態,$v \in R^m$ は入力である。

つぎに 2 章で定義した RPI と RCI の関係を証明なしで述べる。

Remark 1 *(RPI property of an RCI set Ω)*

もしシステム $x_{k+1} = f(x, u, w)$ $(x, u, w) \in X \times U \times W$ に対し $\Omega \subseteq X$ が *RCI set* ならば Ω を *RPI set* とするような状態フィードバック $\nu(x)$ が存在する。ただし $\nu(x)$ は

$$\mathcal{U}(x) \triangleq \{u | f(x, u, w) \in \Omega \;\; u \in U \;\; \forall w \in W\} \tag{8}$$

により定義される集合 $\mathcal{U}$ に属する。つまり $\nu(x) \in \mathcal{U}(x)$ である。またこの状態フィードバックを適用したシステム

$$x_{k+1} = Ax_k + B\nu(x) + w \tag{9}$$

は $\forall x \in X_\nu, \forall w \in W$ の拘束を持つ。ここで X_ν は

$$X_\nu \triangleq \{x | x \in X, \nu(x) \in U\} \tag{10}$$

で定義される集合である。

この定理により制御則を状態フィードバックとしても invariant　set の観点からは保守的でないことがわかる。

以下に invariant set を離散線形システムに応用する上で重要な定理を述べる。この定理よって制御目標達成と外乱を分けて考えることができるようになる。

定理 4.1
Ω を拘束 $(x,w) \in X_\nu \times W$ を持つシステム $x_{k+1} = Ax + B\nu(x) + w$ に対する *RPIset* とする。また入力を $u = v + \nu(x-z)$ とする。すると $\forall v \in R^m, x_k \in z_k \oplus \Omega$ ならば $x_{k+1} \in z_{k+1} \oplus \Omega$ が成り立つ。ここで $x_{k+1} \triangleq Ax_k + Bu + w, \forall w \in W$ であり, また $z_{k+1} \triangleq Az_k + Bv$ である。

[証明]
まず x_{k+1} を計算する。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu + w \qquad\qquad \text{ここで } u = v + \nu(x_k - z_k) \text{ より} \\ &= Ax_k + Bv + B\nu(x_k - z_k) + w \end{aligned} \tag{11}$$

また $z_{k+1} = Az_k + Bv$ より

$$Bv = z_{k+1} - Az_k \tag{12}$$

が成り立つ。これを (11) に代入すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k - Az_k + z_{k+1} + \nu(x_k - z_k) + w \\ x_{K+1} - z_{k+1} &= A(x_k - z_k) + \nu(x_k - z_k) + w \end{aligned} \tag{13}$$

が成り立つ。仮定より

$$x_k \in \Omega \Rightarrow x_{K+1} = Ax_k + B\nu(x_k) + w \in \Omega,\ \ \forall w \in W \tag{14}$$

が成り立つので

$$x_k - z_k \in \Omega \Rightarrow x_{K+1} - z_{k+1} = A(x_k - z_k) + B\nu(x_k - z_k) + w \in \Omega,\ \ \forall w \in W \tag{15}$$

が成り立つ。よって定理が証明された。

この定理は制御系の設計の方針を示している。つまり, 外乱があっても制御系が拘束を満たすようにコントローラを設計するには以下のような 3 段階を踏めばよいことになる。

1. まず RPIset Ω が適切な集合になるように $\nu(x)$ を設計する。
2. 外乱を考えないシステムに対して, 目標を達成するような入力 v を設計する。
3. 実際のシステムには $u = v + \nu(x - z)$ を入力する。

5　外乱がないシステムの拘束

この章では設計手順 2 の外乱を考えないシステムの設計法について述べる。3 章では外乱と拘束がないシステムとして $z_{k+1} = Az_k + Bv$ を考えたが, 外乱が入っても元のシステム $x_{k+1} = Ax_k + Bu + w$ が拘束 $(x,u,w) \in X \times U \times W$ を満たすためには外乱がないシステムにもある程度の拘束が絶対必要となる。ここでは外乱がないシステムがどのような拘束を満たすべきかを説明する。
4 章の定理 4.1 より

$$x_k - z_k \in \Omega \Rightarrow x_{k+1} - z_{k+1} \in \Omega \tag{16}$$

となるような Ω は $x_{k+1} = Ax_k + B\nu(x) + w$ の RPI set として与えられることがわかっている。いま z が満たすべき拘束の集合を Z であらわすと

$$Z \triangleq X \ominus \Omega \tag{17}$$

とあらわされる。また同様に入力に対しても

$$V \triangleq U \ominus \mathcal{U}_\nu \tag{18}$$

の拘束が必要となる。ここで $\mathcal{U}_\nu$ は以下のように定義される。

$$\mathcal{U}_\nu \triangleq \{\nu(x) | x \in \Omega\} \tag{19}$$

これより外乱がないシステムに対しては, 外乱があるシステムの拘束よりもきつい拘束を満たさなければならないことがわかる。

6 外乱がないシステムの設計

外乱がないシステムの設計には数理計画法が使われる。まず, 数理計画法を使って外乱がないシステムが拘束 $(z, v) \in Z \times V$ を満たすように入力を決定する。具体的には評価関数を

$$V_N(v, z) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} l(z_i, v_i) + V_f(z_N),\ l(z, u) \triangleq |z|_Q^2 + |u|_R^2,\ V_f(z) \triangleq |z_N|_P^2 \tag{20}$$

とし, 以下のような問題を解く。

$$\begin{aligned} &\inf_v \ V_N(v, z) \\ subject\ to\ \ & z_{k+1} = Az_k + Bv \\ & z \in Z \\ & v \in V \\ & z_N \in Z_f \end{aligned} \tag{21}$$

この問題を解くことによって外乱がない場合の最適な経路が決定できる。また外乱が入っても元の拘束を破らないことが保障できる。上の問題は Z, V の集合の形により 2 次計画問題, 混合整数 2 次計画問題となる。例えば, 矩形の障害物が存在すれば混合整数 2 次計画問題となる。

今回の場合, 離散系を扱っているのでサンプリング上だけで拘束が満たされることが保障されている。なのでサンプリング間では何の保障もしていないことに注意が必要である。

7 おわりに

本レポートでは [1] と [2] に基づいて色々な invariance set を定義し, それらがコントローラの設計にどのように応用されるのかを示した。[2] ではこの方法は外乱の扱いも数理計画法に組み込む方法より計算時間が短くなると主張している。しかし, 外乱がないシステムに対するコントローラの設計に混合整数計画が使われる場合, 計算時間は問題のサイズに応じて飛躍的に増加する。なので計算時間が短くなるといっても問題のサイズによってはリアルタイムで計算できるくらいまで短くなるとは考えにくい。

今後の発展の方向としては

- 非線形系への拡張
- 3 次元への拡張
- 外乱のないシステムのコントローラの改良
- collison avoidance への応用
- RPIset ではなく最大出力許容集合を使う方法

などが考えられる。また今回扱うことができなかった PIset や RPIset の構成法なども取り入れる予定である。

参考文献

[1] F.Blanchini, “Set invariance in control,” *Automatica*, Vol. 35, No. 11, pp. 1747–1889, 1995.

[2] S. V. Raković and D. Q. Mayne, “Robust Model Predictive Control for Obstacle Avoidance Discrete Time Case,” *Int. Workshop on Assessment and Future Directon of NMPC*, pp. 347–354, 2005.

[3] S. V. Raković and D. Q. Mayne, “A simple tube controller for efficient robust model predictive control of constrained linear discrete time systems subject to bounded disturbances,” *Proc. of the 16th IFAC World Congress IFAC2005*, pp. 871-874, 2005.